



TITLE:

コーナーを過ぎる三次元粘性流 (流体方程式の特異性)

AUTHOR(S):

徳田, 尚之

CITATION:

徳田, 尚之. コーナーを過ぎる三次元粘性流 (流体方程式の特異性). 数理解析研究所講究録 1977, 293: 28-42

ISSUE DATE:

1977-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106193>

RIGHT:

コ-ナ-を過ぎる三次元粘性流

宇都宮大蔵養 徳田 尚之

§ 1. いとぐち

流体力学の分野で、いろいろ重要な応用例があり、
 かもこれまで相当多くの人を研究しているにも拘わらずまだ
 よく理解されていない層のクラスの流れの一つは、幾何学的には
 不連続な形状をしているコ-ナ-に沿う流れがある。例えば
 、航空機の翼と胴体部、尾翼と胴体部、又はターボ翼の根
 本部(即ち端部)に沿う流れとか、ディル-ガー更には風洞の壁
 面コ-ナ-に沿う流れ等は、その代表的なものである。これら
 のコ-ナ-・フローの大きな特徴の一つは、コ-ナ-を形成
 する2つの平面上で成層した境界層が直接干渉し合、てあま
 る流れの三次元性にあるところである。今まで研究されて来
 る三次元流の中の軸対称流とか無限長後退翼上を過ぎる流れ
 の様は、Stokes の流れ関数の適用出来る準二次元的流れとは
 この点では、より区別されるべきである。従って、この三次元

性の他に、形状自体のもつ不連続性のため、流れの中にどのような特異性が現われるかを知ることも大変重要な課題とい、こまりださう。そこで、本論文では、コーナー・フローの特異性の最も強いつと考えられるコーナー近傍で成り立つ Stokes 解を求める事により流れの特異性を明確にし、更にこれ迄に求ま、こいる実験結果、数値解等も紹介し、からコーナー・フロー全体の流れの特徴を説明して行くことにしよう。なお、この種のコーナー・フロー物々な特徴である流れの三次元性は、主流方向に伸びる渦糸群により最も容易に理解出来るが、こわりの物理的解は文献(1)に述べたのどととを参照されたい。

§2 コーナー・フローの構造と方程式

コーナー・フローのモデルとしては、二枚の四半無限平板が夾角 2α で交わり、こ形成されるコーナーを過ぎる流れを考えることにしよう。一様流 U はこのコーナーの交線に沿、こいる場合、即ち、迎之角の流の場合と考えよう。このコーナー形状の前縁部のコーナー交点に原点をこつ円筒座標 (r, θ, x) を座標系として考えてみよう。(詳細は図1をみよ)。考える流れの領域としては前縁部から十分大

れは下流部で $Ux/\nu \gg 1$ の領域とする。これは $Ux/\nu \gg 1$ のある折性曲面上の流れを考えることに相当する。ここで x は前縁部からの距離であり、 ν は流体の運動粘性係数である。この下流部での流れを考察するにあたり、 x は、流れを次の四つの各々異なり特徴をもつ領域に分割して考えると最も便利である。

- ①. θ を止め、 $(-\alpha < \alpha)$ $r \rightarrow \infty$ に近づける投から充分離れたところからポアズーニル流領域。
- ②. $\theta \rightarrow \pm \alpha$ で $r \rightarrow \infty$ に近づける Blasius 流領域
- ③. θ を止め、 $r \rightarrow O(1)$ の三次変性の強いコーナ領域
- ④. θ を止め、 $r \rightarrow 0$ に近づける Stokes 領域。

本論文の残りの要旨の対象は、流れの三次変性が増え、 α がコーナ形状の非変性の強さで与えられる③と④の領域である。

それでは③と④の領域での流れが互に異なる方程式で導かれる。
 $Ux/\nu \gg 1$ という条件から主流方向 (x 軸) については境界層近似が成り立ち、 $\frac{Ux}{\nu} \rightarrow \infty$ という極限をとりその第一近似をとると、連続及び運動方程式は次の如く表わすことが出来る。
 (詳細は文献(2),(3)を参照せよ)。

$$\nabla^2 u = N_1(u, v, w) \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 \phi = H(\psi) + N_2(u, v, w) \quad (2.2)$$

$$ru = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad rv = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad w = \frac{r}{2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2.3)$$

境界条件は;

$$u = v = w = 0 \quad \theta = \pm \alpha \quad (2.4)$$

$$\phi, \psi \rightarrow (\phi, \psi)_P \quad r \rightarrow \infty, \theta \text{ fixed} \quad (2.5)$$

$$\phi, \psi \rightarrow (\phi, \psi)_B \quad r \rightarrow \infty, \theta \rightarrow \pm \alpha$$

但し, r, θ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$H(\psi) = \frac{r}{2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{1}{2r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{\psi}{2r^3} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{2r^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^3} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \theta^2},$$

$$N_1(u, v, w) = -\frac{r}{2} u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

$N_2 \in N_1$ と同様非線形対流項を表わす。又 (2.5) の P , B はポテンシャル流領域及び Blasius 流領域を示す。 $(\phi, \psi)_P$ は勿論 $r \rightarrow \infty$ の一様流を表わす。

(2.1) 式は主流成分 u に支配する方程式であり, (2.2) は主流方向の渦度 ω に支配する方程式で, このコナー・フローの三次元性を特徴づける。(2.3) 式は三次元速度成分と表わすベクトル・ポテンシャル関数 ϕ, ψ の定義式である。方程式 (2.1 ~ 2.3) から明らかなる様に, (2.1 ~ 2.3) は ϕ, ψ のみで表わす事が出来るので, (2.1), (2.2) と境界条件 (2.4), (2.5) と満足する様に解ける。方程式 (2.1), (2.2) は座標 r, θ について楕円形の, 甚く非線形方程式で, 連立して解かなければならない。こゝでは, コナー・フローの特性を最も強く及

映すると考えてよい Stokes 近似を押し進めてゆこう。実際に、物理的には流場の三次元性に重要な影響をもつ主流方向渦度方程式 (2.2) を全く無視して Rayleigh の方法⁽¹⁾を降れば、非線形方程式 (2.1, 2.2) と合理的に線形化出来る唯一の方法と考えられる。慣性項の影響の強いコーナー領域⁽³⁾自体の流れは現状では数値解に頼るわけがあるのか、勿論この Stokes 領域⁽⁴⁾の解に接続せねばならない訳であり、その意味では Stokes 解は重要な意義をもつてゐる。数値解、実験結果については §4 で述べる。

§3. Stokes 解

境界条件 (2.4) を満たすから方程式 (2.1), (2.2) の解を変数 θ を固定 ($-\alpha \leq \theta \leq \alpha$) して、 $r \rightarrow 0$ の極限で求めることが可能である。このコーナー交点に極く近い領域では渦度の勾配が非常に大きく、慣性項の影響の小さい拡散項に支配されるいわゆる線形の Stokes 近似が成り立つ。今迄に求ま、この特徴的長さの内の問題での Stokes 解——例えば、Carrier & Lim⁽⁴⁾による半無限平板の前縁部の解——では、これらの Stokes 解が $r \rightarrow 0$ であれば成り立つ事のみが判、この点で、慣性項の効いてくる領域とどの様に接続して

ゆくのみな全く不明であつたが、著者は^{(2),(3)}、この半無限物体での Stokes 解が粘性均の効く領域と解が一致するマッチング領域のあることを証明した。このためこれまで非常に限定した意義しか持つことの許さぬが、Stokes 解が全体の領域の中では、まり1位位置づけを与えらるゝといふ、こゝに在る。実際、マッチングのため、③の領域での解の形が決まってくる。さて、(2.1), (2.2) 式の Stokes 解は u と ϕ について次の如く求めると便利である。^{(2),(3)}

$$u(r, \theta) = u_0(r, \theta) + u_1(r, \theta) + \dots \quad (3.1)$$

$$\phi(r, \theta) = \phi_0(r, \theta) + \phi_1(r, \theta) + \dots \quad (3.2)$$

但し、 $u_0 \gg u_1 \gg u_2, \dots$ for θ fixed as $r \rightarrow \infty$.

$$\phi_0 \gg \phi_1 \gg \phi_2, \dots$$

こゝでは $\alpha = \pi - \alpha_d$ の代表的な直角 $\alpha = \pi/2$ の場合と考へておこう。 $\alpha_d = \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ の場合の Stokes 解を求める手順等は文献(3)に詳しう。

$$u = A_0 r^2 \sin 2\theta + A_1 r^6 \ln r \sin 6\theta + r^6 \left\{ A_2 \sin 6\theta + \frac{A_1^2}{36\pi} f_3(\theta) \right\} + \dots \quad (3.3)$$

$$\phi = \frac{A_1}{4} r^6 \sin 2\theta + B_1 r^{2\alpha_1} (\sin \alpha_1 \theta + C_1 \sin (\alpha_1 - 2)\theta) + O(r^6 \ln r) + \dots \quad (3.4)$$

こゝで $A_0, A_2, A_3, \dots, B_1, C_1, \dots$ は Stokes 近似ではききとるべき未定係数であり、 $2\alpha_1 = \pi + i\kappa_2$, $\kappa_1 = 5.808$, $\kappa_2 = 1.464$ は定数である。

る。この直角コーナーの Stokes 解 (3.3), (3.4) を吟味するとコーナー近傍の非常に面白い流れの特徴が判る。

- (1) (3.3) から解く様々とし (y, z) を平板に沿う直角座標とすれば, $u \propto y$ と有り主流速度成分 u は剥離型である (例えば, $z=0$ で $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ になることから明らかであろう)

- (2) $r=0$ の方が表面流れ線群と表面摩擦応力線群の唯一の特異点 (リドル点) になることから Lighthill-Maskell の分類から, 若し剥離が起るとすれば, 剥離は流れが固着する剥離気泡型の流れのパターンを示す。

- (3) 流れの三次元成分である クロス・フロー成分には,

Moffatt が二次元楔領域の解として求めた一連の粘性渦の解が現われる。

上の (1), (2) で特徴づけられる三次元流は, 二次元剥離流と似た主流方向の座標 x について $x^{1/2}$ の如き代数的特異点が見られる (Brown & Stewartson⁽⁶⁾)。一方 (3) の粘性渦の解は指数部に複素数に伴う流れと一対は大変な複雑な特異性に伴う流れである。

この直角コーナーの Stokes 解が示唆する様にコーナー隅は大変複雑な流れのパターンを絡め合、た流れとい、こまごま。勿論、このコーナー夾角が 2π まで拡がると流れの

特異性もその角度により変，こゝる事は予想されるが，その
 主要な特性は直角コーナーの場合に集約^{とい}される^{とい}。こゝら
 だるう。詳細は文献(3)と参照して頂くとして，コーナー流
 には夾角 2α により，次の三つの形の特異性が現われること
 と注意しておこう。

- (1). 剃刀型速度分布のためコーナー交点に至るサドル
 点での $x^{-1/2}$ の如き代数特異点 ($0 < 2\alpha < \pi$) .
- (2). 夾角 $0 \sim 156^\circ$ 内で起る Moffatt 渦に代表される複素
 数的特異性 .
- (3). 表面摩擦力が交点近傍でも $r^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) の如き代数
 特異性 (主流速度について $\pi < 2\alpha \leq 2\pi$, クロス
 フロ - について $1.43\pi < 2\alpha \leq 2\pi$) .

(1), と (3) はともに代数特異点であるが, (1) は主流方向の座
 標 x についてであるのに対し, (3) はそれに垂直なクロス・フ
 ロ - 面の極座標 r についてであることに注意されたい. $2\alpha = \pi$
 の半無限平板の場合を除くと, 総ての角度のコーナ^流ーに上
 の三つの特異性のうち少なくともどれか一つは必ず存在してい
 ることが判, する. こゝらの Stokes 解はあくまでコーナ
 -近傍の流れ^にしか適用出来る訳であるが, コーナ領域全
 体の流れをみるのに今迄に発表されている数値解及び実験結
 果を紹介してみよう。

§. 4. 数値解と実験結果.

この2-ナ-流の理論は $2d = \frac{\pi}{2}$ の場合が最もよくから研究されており、緩和法による Carrier⁽⁷⁾, Pearson⁽⁸⁾ の数値解、最近では大型高速計算機による Rubin & Grossman⁽⁹⁾, Desai & Mangler⁽¹⁰⁾, Ghia⁽¹¹⁾ の数値解が発表されている。Carrier⁽⁷⁾ の解は三次元のベクトル・ポテンシャル関数と一組のスカラー関数で表わそうと1次元の主流方向の温度方程式(2.2)を完全に満足されているが、これを後に Pearson⁽⁸⁾ により修正されている。一方、Rubin & Grossman⁽⁹⁾, Desai & Mangler⁽¹⁰⁾, Ghia⁽¹¹⁾ の解は、前者は Gaus-Seidel 法、Ghia は ADI 法による大型計算機による数値解である。Rubin & Grossman の解は、座標系としては最も簡単な直角座標を用い、代数的に1次漸近1度の準二次元の Blasius 流への接続は、Rubin & Pal⁽¹²⁾ による漸近解を用いている。これに対して Desai & Mangler⁽¹⁰⁾ は、どうして誤差の大きさと考えるべき未定係数を含む漸近解への接続という方法(直接数値)はとらずに簡単な一次変換を導入して無限遠領域まで積分するという方法を取っているが、座標系として直交しているという表示を用いているため差分方程式が余りに複雑になりすぎている。Ghia の数値解は、きわめて安定な ADI 法を使っているというものの他に、座標系としては直角座標、積分範囲も一次変換による無限遠までと、上の Rubin & Grossman⁽⁹⁾, Desai

と Mangler⁽¹⁰⁾ の数値スキームの長所の点を採用している。図2に示す様々、Desai & Mangler の解は、Rubin & Grossman, 更には Ghia の解と殊にウロス・フロ－成分で顕著に異なり、これらのか目と異なり。数値解で用いたステップ数、差分方程式の簡潔さと、安定性等と考えると Ghia の解が最も信頼性がある様々著者々には思える。事実、Desai & Mangler の解は、Pearson, Rubin & Grossman, Ghia 等の解とは余りに違ひすぎるし、主流速度の等速度線と比較すると、は、きりと1を覆りの指摘されている Carrier の解に近いというのも不思議である。

この内題の実験結果は Zamir & Young⁽¹³⁾ により示されている。上の数値解と顕著に違ひのは、主流速度の等速度線が流れの対称線上で膨らみを生ずることである。実際この膨らみは、藤本⁽¹⁴⁾, Barclay⁽¹⁵⁾ 等の実験にも両明されている様であるが、数値解系は未だ見付か、こいなり性格のそののである。この等速度線群の膨らみは物理的にはその膨らみ部分で摩擦応力が小さい領域の存在することと意味する。流れの対称線上では渦度が消えるのとその近傍に摩擦応力の小さな領域が出来る事は想像し得ることであるし何れも不思議は無いが、だが、等速度線に膨らみが出る位極端に局所化しては摩擦応力領域であるに要であるかどうかは又別の内題である。上の数値解と比較してみると、Carrier⁽⁷⁾ と Desai & Mangler⁽¹⁰⁾ のその等較いる

Rubin & Grossman⁽⁹⁾ と Ghia⁽¹⁰⁾ の解の方が等速度流の勾配がわかるやかで、明らかに実験に近い位摩擦応力と殊に渦の対称線近傍で示している事が注目される。Ghiaの解がこれらの数値解の中で最も信頼性があると思えるのは、上で述べた数値スキーム上の要因の他にこの物理的な面が大きな要因になっていることとつけ加えておこう。

実験結果では常に観察されている対称線上での等速度流の膨らみかどうゆう要因により起^きるのか、又定量的にばどんほ評価があるのか等まだ、まじりしている点が多い。Barclay⁽¹⁵⁾ はこの膨らみが流れの安定性に強く関連しているのではなかつかと推測しているが、それなりの様は実験結果と相俟^あっている；コーナー-夾角 $\pi/2$ の実験では下流に行く程増大した膨らみか、それよりほろい 135° のコーナーでは逆に減少している。

数値解、実験結果とも直角コーナー($2\alpha = \pi/2$)の場合しか調べられていない様であり、他の角度のものの上のBarclay⁽¹⁵⁾ の 135° 以外発表されてない。例えは、 $2\alpha = 2\pi$ の四角無限平板を過ぎる流れにあるか、コーナー部分に当る側縁部 (side edge) の解析はない。Howarth, Stewartson⁽¹⁶⁾ 等による研究はこの側縁部を除いた解であり、物理的にみればStewartson⁽¹⁶⁾ の解には疑問が多い。 $2\alpha = \pi/2$ と較べれば、実験、数

値解とも場1の場合と考へるのでは是非欲しう得るものである。

§5. 結 論

コーナーを過ぎる粘性流は、我々流体力学と研究してゐる者にとりては、色々の意味で興味のある問題と提供してくれてゐる：本質的な流れの三次元性、剥離型である主流方向の速度成分、Moffattの粘性渦の存在、実験では常に観察されてゐる等速度線の対称線近傍での膨らみ、又コーナー前縁部で巻き上ることにより生じる主流方向の渦対の存在等：どの一つを取、こゝでも興味深い問題である。

これらの解明と対峙してゐる困難は、解析的な面では、非線形問題であるため使へる解析方法が極めて限定されてゐることによるし、又実験の面から云へば、流れ自体が極めて不安定があることによる。この様な事情で、コーナー・フローとしては最もよく研究されてゐる夾角 $\pi/2$ の直角コーナーの場合でも、数値解と実験結果とはまだ可成りの差があるのが現状である。この直角コーナーよりはず、と容易と考へらる四半無限平板に於ては、こゝの数値解、実験結果を何れも求むる。今後の研究を期待したい。

References.

1. 徳田尚之: コーナ - エッジ 近 3 次元粘性流
 日 本 物 理 学 会 報 告 1976 年 5 月 号 18.
2. Tokuda, N: Viscous flow near a corner in three-dimensions.
 J.F. M 53 (1972) 129
3. Tokuda, N: Stokes solutions for flow near corners in three-dimensions. J. Phys. Soc. Japan 38 (1975) 1183
4. Carrier, G.F & Lin, C.C: On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate. Q. Appl. Math., 6 (1948) 63
5. Lighthill, M.J: Chapt. II. Laminar Boundary Layers. Ed. L. Rosenhead
 Oxford Univ. Press 1963
6. Brown, S.N & Stewartson, K: Laminar Separation
 Ann. Rev. Fluid Mech. 1. (1972) 45
7. Carrier, G.F: The boundary layer in a corner
 Q. Appl. M. 4 (1947) 4
8. Pearson, J.R.A: Homogeneous turbulence and laminar viscous flow
 Ph.D Thesis Cambridge Univ, 1957
9. Rubin, S.G & Grossman, B: Viscous flow along a corner. Part II
 P.I. B.A.L Report No 69-33 (1965)
10. Desai, S.S & Mangler, K.W: Incompressible laminar boundary-layer flow
 along a corner. Roy. Air. Est. Tech. Rept 74062 (1974)

11. Ghia, K.N : Incompressible streamwise flow along a corner
AIAA J. 13 (1975) 902.
12. Rubin, S.G & Dal, A : Viscous flow along a corner, Part I.
P.I.B.A.L. Rept 69-18 (1969)
13. Zamir, M & Young, A.D : Experimental investigation of the boundary layers
in a streamwise corner: Aero. Quant. 21 (1970) 313
14. 藤本武男 : 航空学会誌. (各 - 99 巻 5 号の 578 頁)
15. Barclay, W.H : Experimental investigation of the laminar flow
along a 135° corner. Aero. Quant. 24 (1973) 147
16. Stewartson, K : Viscous flow past a quarter-infinite plate.
J. Aero. Sci. 28 (1961) 1.

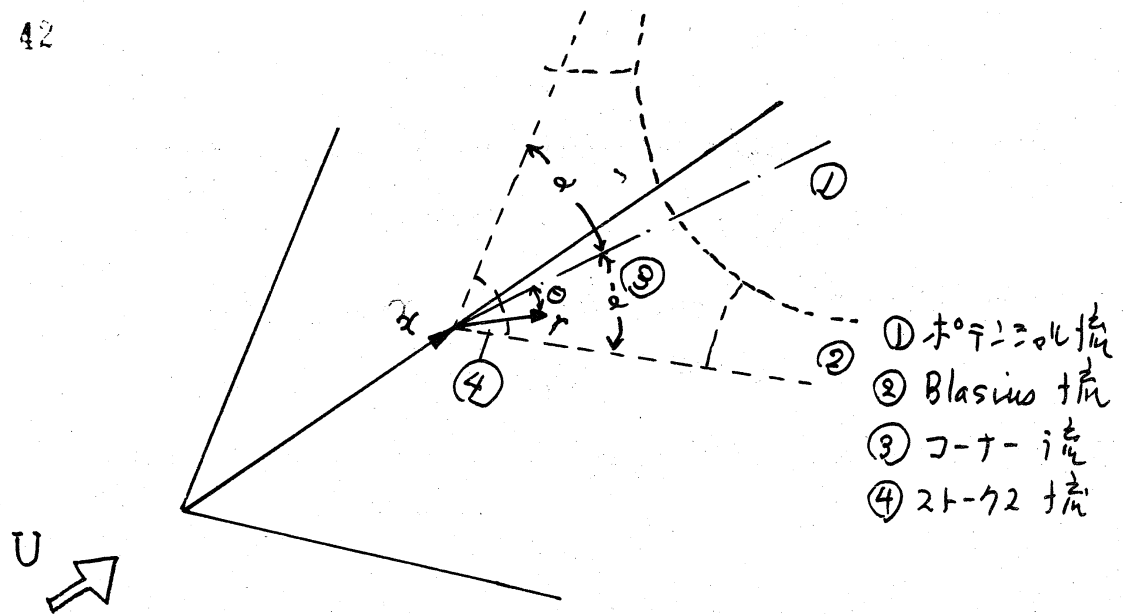


図1. 座標系と流れの領域

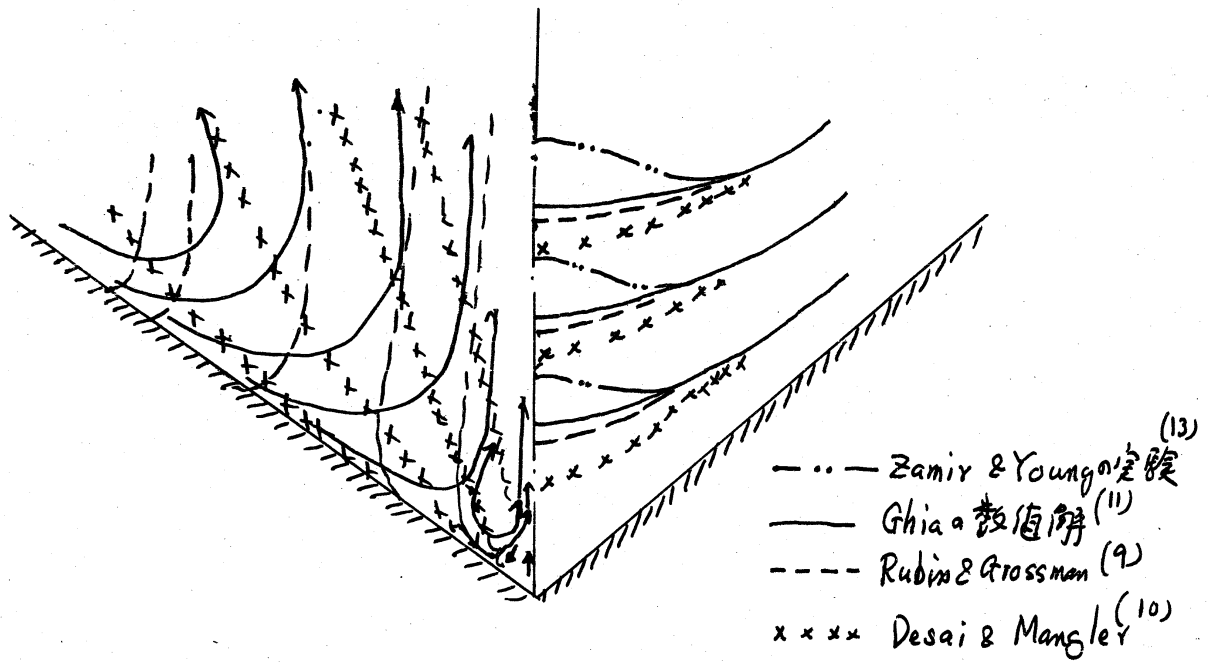


図2. 等速度線(主流速度): 右半面

とウエス・フロー面の流れ線群: 左半面.